I : Première partie étude d'une fonction f

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par

$$f(x) = \ln(1+2x).$$

1. Justifier que f est strictement croissante sur l'intervalle I.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\frac{1}{2}$.
3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par $g(x) = f(x) - x$.
   - **a.** étudier les variations de g sur l'intervalle I.
   - **b.** Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et une autre, notée β, appartenant à l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   - **c.** En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I.
4. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\beta[$, $f(x)$ appartient aussi à $]0\,;\,\beta[$.

II : Deuxième partie étude d'une suite récurrente

On appelle $(u_n)_{\geqslant 0}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à $]0\,;\,\beta[$.
2. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
3. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

III : Troisième partie Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f'(x) \leqslant \frac{2}{3}$.
2. Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$
   - **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_{u_n}^{\beta} f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3}(\beta - u_n)$.
   - **b.** En déduire que pour tout entier naturel n, $\beta - u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}(\beta - u_n)$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $0 \leqslant \beta - u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   - **c.** Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$?