

On injecte au patient une première dose de médicament de 1 mg. On admet que la quantité de médicament présente dans le sang du patient baisse de 30 % toutes les heures. Pour compenser cette baisse, on injecte une dose supplémentaire de 0,75 mg de médicament toutes les heures.

On modélise la situation par une suite (u_n) , où, pour tout entier naturel n , u_n représente la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient au bout de n heures écoulées depuis l'injection initiale.

Sous ces conditions, on a $u_0 = 1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 0,75$.
2.
 - a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .
 - d. D'après ce modèle, le traitement présente-t-il un risque pour le patient? Justifier.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 2,5$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.
 - b. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,7^n$.
4. D'après ce modèle, au bout de combien d'injections supplémentaires la quantité de médicament présente dans le sang de ce patient dépasse-t-elle 2,4 mg?