

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[2; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$

On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$
et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

- a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
- b. Donner la valeur de α arrondie au centième.
- c. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, les réponses pourront s'appuyer sur les résultats de la **partie A**.

On définit une suite (a_n) par son premier terme $a_0 > 0$ et pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$$

On étudie le cas où $2 \leq a_0 \leq \alpha$, où α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $2 \leq a_n \leq \alpha$.
2. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (a_n) converge.
4. Démontrer que la limite de la suite (a_n) est α .