

**Propriété**

Soit  $P(n)$  une proposition dépendant d'un entier  $n$  et  $n_0$  un entier fixé.

Si  $P(n_0)$  est vraie (Initialisation)

et si pour tout entier  $n \geq n_0$   $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  (hérédité),

alors  $P(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

*Remarque*

Cette propriété, que l'on ne démontre pas et qui semble tenir du "bon sens" est en fait un axiome des mathématiques, c'est-à-dire un énoncé posé à priori qui sera une des bases de la théorie mathématique.

En géométrie un axiome célèbre est l'axiome d'Euclide : "Par un point donné il passe une parallèle et une seule à une droite donnée".

**EXEMPLE 1**

soit  $a$  un réel strictement positif

montrer que pour tout entier  $n$   $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Soit  $P(n)$  la propriété " $(1 + a)^n \geq 1 + na$ "

**initialisation**

pour  $n = 0$

$$(1 + a)^0 = 1 \quad 1 + na = 1 + 0 \cdot a = 1$$

$P(0)$  est vraie

**hérédité**

on suppose que pour un entier  $n$   $P(n)$  est vraie montrons que  $P(n+1)$  est vraie

d'après l'hypothèse de récurrence

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

on multiplie par  $1 + a$

$$(1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na)$$

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$$

$$\text{d ou } (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + n a^2$$

$$n a^2 \geq 0 \text{ donc } 1 + (n+1)a + n a^2 \geq 1 + (n+1)a$$

$$\text{d ou } (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$$

P(n+1) est vraie la propriété est héréditaire

**conclusion**

P(0) est vraie et la propriété est héréditaire d après le principe de récurrence

$$\text{pour tout entier } n \quad (1 + a)^n \geq 1 + na$$

## EXEMPLE 2

montrer que pour tout entier n non nul  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

soit P(n) la propriété “  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  ”

**initialisation**

pour n = 1

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1 \quad \text{d autre part } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

P(1) est vraie

**hérédité**

on suppose que pour un entier n P(n) est vraie montrons que P(n+1) est vraie

d après l hypothèse de récurrence

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

P(n+1) est vraie

**conclusion**

P(1) est vraie et la propriété est héréditaire d après le principe de récurrence

pour tout entier n non nul  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$