Dans le repère orthonormé (O ; I, J) ci-contre, on a représenté :

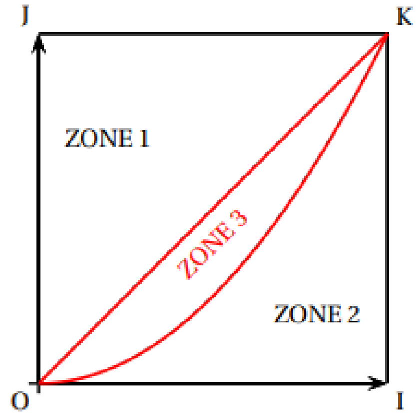
— la droite d'équation $y = x$;

— la droite d'équation $y = 1$;

— la droite d'équation $x = 1$;

— la parabole d'équation $y = x^2$.

On peut ainsi partager le carré OIKJ en trois zones.



Les parties B *et* C *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre*

Partie A

Démontrer les résultats figurant dans le tableau ci-dessous.

ZONE	ZONE 1	ZONE 2	ZONE 3
AIRE	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Partie B : un premier jeu

Un joueur lance une fléchette sur le carré ci-dessus. On admet que la probabilité qu'elle tombe sur une zone est égale à l'aire de cette zone. Ainsi, la probabilité que la fléchette tombe sur la ZONE 3 est égale à $\frac{1}{6}$.

- Si la fléchette tombe sur la ZONE 3, alors le joueur lance une pièce équilibrée.
  Si la pièce tombe sur PILE, alors le joueur gagne, sinon il perd.
- Si la fléchette tombe sur une autre zone que la ZONE 3, alors le joueur lance un dé équilibré à six faces. Si le dé tombe sur la FACE 6, alors le joueur gagne, sinon il perd.

On note les évènements suivants :

T : « la fléchette tombe sur la ZONE 3 » ;

G : « le joueur gagne ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{2}{9}$.

3. On sait que le joueur a gagné. Quelle est la probabilité que la fléchette soit tombée sur la ZONE 3 ?

Partie C : un second jeu

Un joueur, appelé joueur n^o 1, lance une fléchette sur le carré précédent. Comme dans la partie B, on admet que la probabilité que la fléchette tombe sur chacune des zones est égale à l'aire de cette zone.
Le joueur gagne une somme égale, en euros, au numéro de la zone. Par exemple, si la fléchette tombe sur la ZONE 3, le joueur gagne 3 euros.
On note X_1 la variable aléatoire donnant le gain du joueur n^o 1.
On note respectivement $E(X_1)$ et $V(X_1)$ l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_1.

1. **a.** Calculer $E(X_1)$.

b. Montrer que $V(X_1) = \frac{5}{9}$.

2. Un joueur n^o 2 et un joueur n^o 3 jouent à leur tour, dans les mêmes conditions que le joueur n^o 1. On admet que les parties de ces trois joueurs sont indépendantes les unes des autres.

On note X_2 et X_3 les variables aléatoires donnant les gains des joueurs n^o 2 et n^o 3. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

a. Déterminer la probabilité que l'on ait $Y = 9$.

b. Calculer $E(Y)$.

c. Justifier que $V(Y) = \frac{5}{3}$.