Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est $0,9$.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est $0,7$.

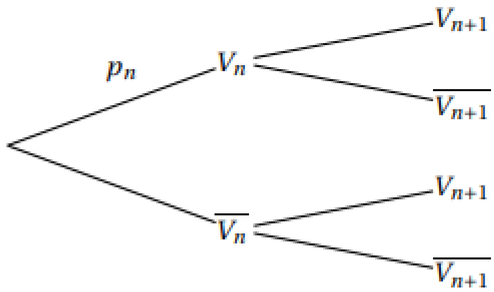
Pour tout entier naturel n, on note V_n l'évènement « l'étudiant a choisi un plat végétarien le n^{e} jour » et p_n la probabilité de V_n.
Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

1. **a.** Indiquer la valeur de p_2.

b. Montrer que $p_3 = 0,88$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

c. Sachant que le 3^{e} jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le jour précédent ?
On arrondira le résultat à 10^{-2}.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,7$.

4. On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geqslant 1$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

Programme 1

```
def repas(n):
  p=1
  L=[p]
  for k in range(1,n):
    p = 0.2*p+0.7
    L. append(p)
  return(L)
```

Programme 2

```
def repas(n):
  p=1
  L=[p]
  for k in range(1,n+1):
    p = 0.2*p+0.7
    L. append(p)
  return(L)
```

Programme 3

```
def repas(n):
  p=1
  L=[p]
  for k in range(1,n):
    p = 0.2*p+0.7
    L.append(p+1)
  return(L)
```

a. Lequel de ces programmes permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) ? Aucune justification n'est attendue.

b. Avec le programme choisi à la question **a.** donner le résultat affiché pour $n = 5$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$.

5. En déduire la limite de la suite (p_n).