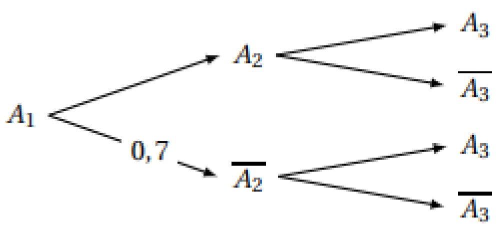
Soit $n$ un entier naturel non nul.
Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements $A_n$ et on note $p_n$ la probabilité de l'évènement $A_n$.
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement $A_n$ est réalisé alors l'évènement $A_{n+1}$ est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'évènement $A_n$ n'est pas réalisé alors l'évènement $A_{n+1}$ est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.

**Partie A :**

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :

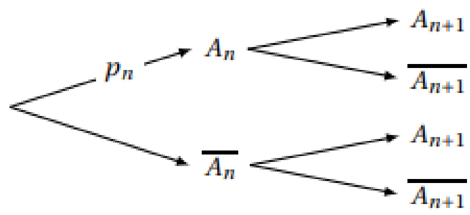



2. Montrer que $p_3 = 0,58$.
3. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$, arrondir le résultat à $10^{-2}$ près.

**Partie B :**

Dans cette partie, on étudie la suite $(p_n)$ avec $n \geqslant 1$.

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :




2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul : $p_{n+1} = -0,4p_n + 0,7$.

   On considère la suite $(u_n)$, définie pour tout entier naturel $n$ non nul par :

   $u_n = p_n - 0,5$.

   **b.** Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   **c.** En déduire l'expression de $u_n$, puis de $p_n$ en fonction de $n$.

   **d.** Déterminer la limite de la suite $(p_n)$.

**Partie C :**

Soit $x \in ]0\,;\,1[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}\left(\overline{A_{n+1}}\right) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul : $p_{n+1} = (1-2x)p_n + x$.

2. Démontrer par récurrence sur $n$ que, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

3. Montrer que la suite $(p_n)$ est convergente et donner sa limite.