Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

Partie I : Étude d'une fonction g

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln x - x + 1$$

et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Étudier les variations de g. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.
3. On note $\mathscr{C}'$ la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \ln x$ dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[1 ; \mathrm{e}]$, on a :

   $$x\ln x - x + 1 \leqslant \ln x$$

   On ne demande pas de représenter $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
4. **a.** Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

   $$J = \int_1^e (x-1)\ln x \, \mathrm{d}x$$

   b. Soit Δ le domaine plan défini par :

   $$\Delta = \left\{M\left(x ; y\right) ; 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant y \leqslant \ln x\right\}$$

   Déterminer, en cm^2, l'aire de Δ. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.

Partie II : Étude d'une fonction f.

Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x$$

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en 1. Pour l'étude de la limite en 1, on pourra utiliser un taux d'accroissement.
2. Déterminer le tableau de variation de f. On pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.