On considère la fonction f_k définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1+\ln x)}{x}$$

où k est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.

On désigne par $\mathscr{C}_k$ la représentation graphique de la fonction f_k dans un repère orthonormé.

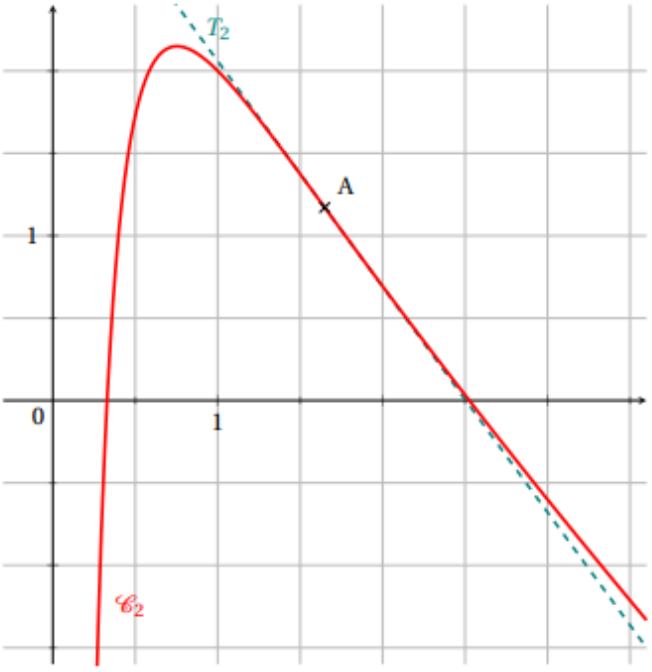
On admet que la fonction f_k est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

On note f_k' sa dérivée première et f_k'' sa dérivée seconde.

Partie A : étude d'un premier cas particulier

Dans cette partie, on se place dans le cas $k = 2$.
La courbe $\mathscr{C}_2$ est représentée sur le graphique ci-dessous.
On précise que :

- Le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_2$;
- T_2 est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point A.

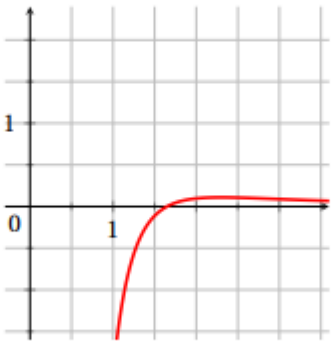


1. On considère une primitive F_2 de la fonction f_2 sur $]0;+\infty[$.
Avec la précision permise par le graphique, donner les variations de la fonction F_2 sur l'intervalle $]0;3]$.

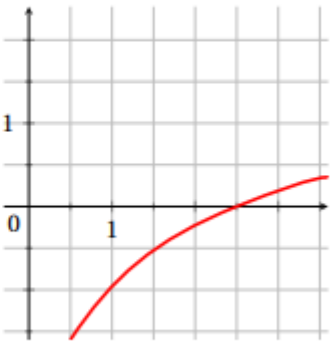
2. Parmi les trois courbes ci-dessous, indiquer celle qui représente f_2' et celle qui représente f_2''. Justifier.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Partie B : étude d'un second cas particulier

Dans cette partie on se place dans le cas $k = 1$.

On considère la fonction f_1 définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{x}$$

1. a. Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$f_1'(x) = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

b. Déterminer la limite de $f_1'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. On admet que :

- l'axe des ordonnées est une asymptote de la courbe de f_1' ;
- pour tout réel $x > 0$, $f_1''(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de f_1' sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f_1'	‖	$+\infty$ ↘	$-1-\frac{1}{2e}$	↗	-1

a. Justifier les variations de la fonction f_1' sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et la valeur de l'extremum.

b. Justifier la limite de la fonction f_1' en 0.

c. Montrer qu'il existe une unique solution α à l'équation $f_1'(x) = 0$ sur $]0\,;+\infty[$.
En déduire que f_1 admet un maximum sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.