On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Pour tout réel strictement positif x, démontrer que
$$f'(x)=\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs exactes des éventuels extremums de la fonction.
4. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
5. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, on a
$$f''(x)=\frac{-5+6\ln(x)}{x^4}$$
6. **a.** Étudier la convexité de la fonction f en précisant les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
   b. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $\left]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$, on a
$$x-1\geqslant\frac{\ln(x)}{x^2}$$
7. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};+\infty\right[$, on a aussi
$$x-1\geqslant\frac{\ln(x)}{x^2}$$