On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x\ln x$.

a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

a. Démontrer que sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = (\ln x)(2+\ln x)$.

b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

4. On considère l'équation $f(x) = 2$.

a. Justifier que, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, cette équation admet une unique solution. On note α cette solution.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.