On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$.
3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.
6. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.

   b. En déduire l'ensemble des solutions sur R de l'équation :

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

   c. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).