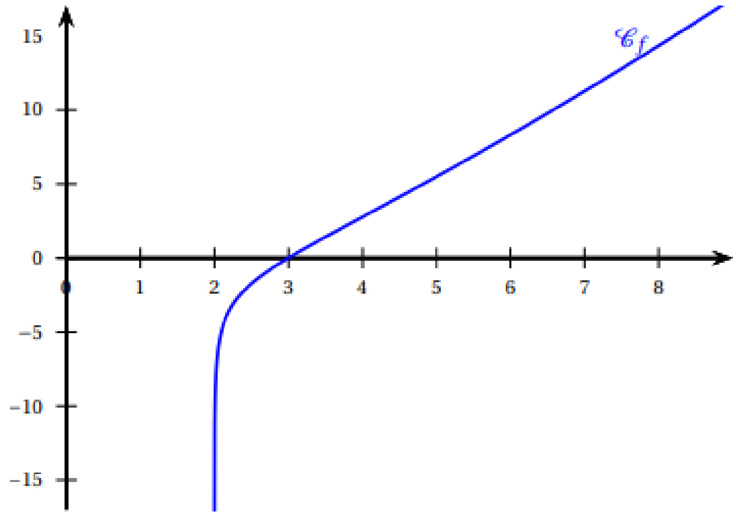
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x-2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$.

3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x)$.

Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1.?

4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.

a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

b. On admet que $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2\,;\,+\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.

c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.

d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$.

6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3?