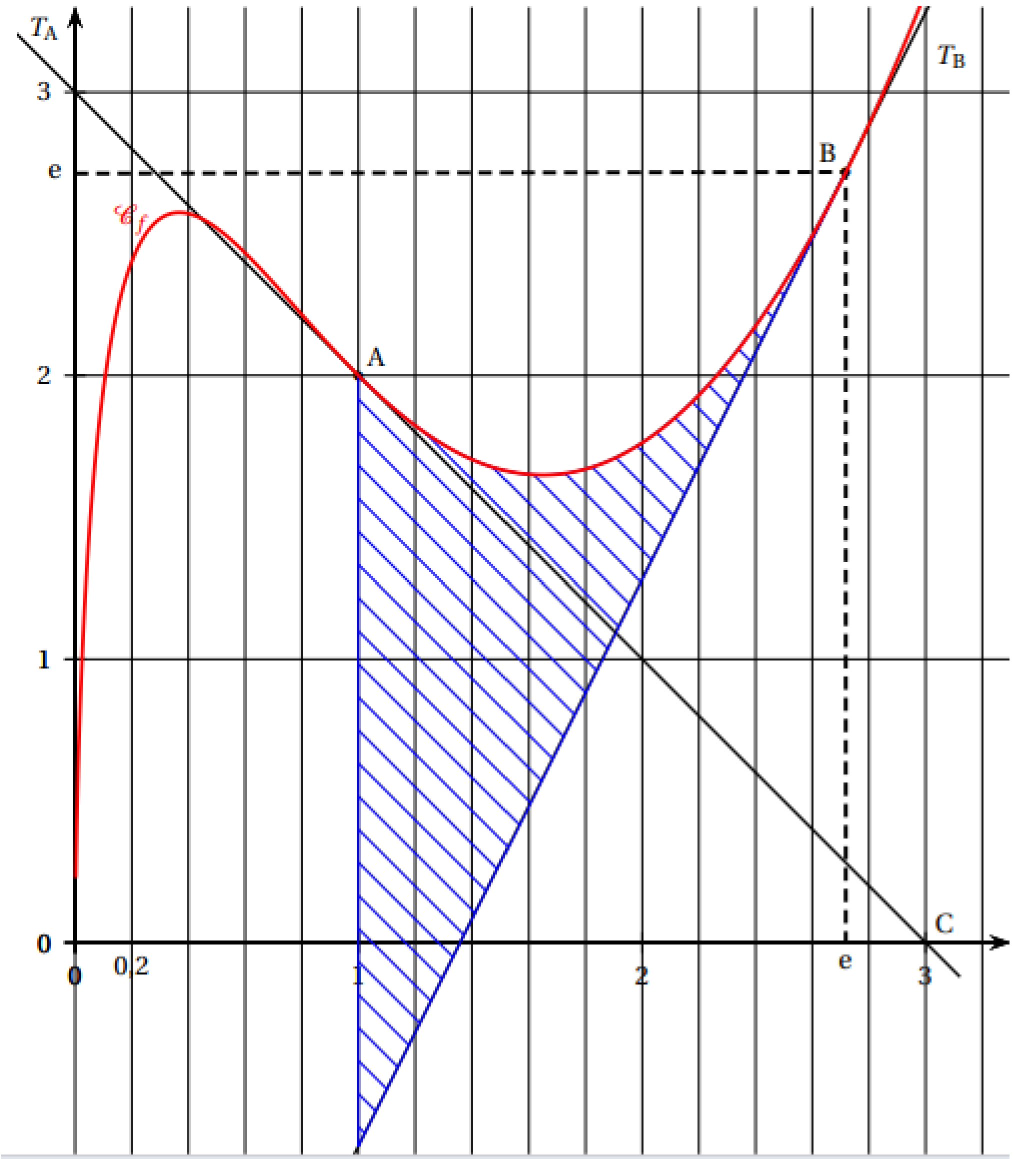
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]0; 3]$;
- la droite T_{A},tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A(1 ; 2) ;
- la droite T_{B} tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B(e ; e).

On précise par ailleurs que la tangente T_{A} passe par le point C(3 ; 0).



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0;3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
   En déduire que $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
   On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
   a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}(4\ln x + 1)$.
   b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
   c. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.