

**Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = 4 \ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$ .

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-1$ .
2. Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

3. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  puis en déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[2 ; 6,5]$ .
4. On considère  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $[2 ; 6,5]$  par  $h(x) = f(x) - x$ .

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction  $h$  :

$x$	2	$m \approx 2,364$	6,5
$h(x)$	$h(2)$	$M \approx 2,265$	$h(6,5)$

Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in [2 ; 6,5]$ .

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import * def f(x) :  
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25  
  
def bornes(n) :  
    p = 1/10**n  
    x = 6  
    while f(x)-x > 0 :  
        x = x + p  
    return (x-p, x)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande  $\log(x)$  renvoie la valeur  $\ln x$  ;
  - la commande  $c**d$  renvoie la valeur de  $c^d$ .
- a. Donner les valeurs renvoyées par la commande `bornes(2)`.  
On donnera les valeurs arrondies au centième.
- b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

### Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$ , et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel,

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5.$$

2. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$ .
3. On rappelle que le réel  $\alpha$ , défini dans la partie A, est la solution de l'équation  $h(x) = 0$  sur l'intervalle  $[2; 6,5]$ .  
Justifier que  $\ell = \alpha$ .