Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$
- Si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

Montrer que : si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \ln\left(1+x^n\right)$$

et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x.$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f_1 sur $[0\,;\,+\infty[$.
   c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
   (Pour le calcul de I_1 on pourra utiliser le résultat suivant :
   pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$)

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.
   b. Étudier les variations de la suite (I_n)
   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

   a. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de g sur $[0\,;\,+\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a

$$\ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n.$$

   c. En déduire la limite de la suite (I_n).