Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1).$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ est donnée en annexe.

1. **a.** Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. L'axe des abscisses est-il tangent À la courbe $(\mathscr{C})$ au point O?

2. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

   a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

   $$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

   b. Calculer I.

3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0;\,1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   La suite (u_n) converge-t-elle?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).