Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x.
3. En déduire le tableau de variations de f_k.

Partie C

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par $I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $I_n = \int_{-2}^{0} x^n e^{-x}\,dx$.
   a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0.
   b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :
   $$I_{n+1} = (-2)^{n+1}e^2 + (n+1)I_n.$$
   c. En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2.
2. Le graphique ci-dessous représente une courbe $\mathscr{C}_k$ qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie B.

a. À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.
b. Soit $\mathscr{S}$ l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer $\mathscr{S}$ en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.