$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{et, pour } n \geqslant 1,\ u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

1. a. Soit f la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Calculer la dérivée f' de f. En déduire u_0.

b. Calculer u_1.

2. a. Prouver que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).
En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b. Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$ on a :

$$1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad (1)$$

Déterminer la limite de (u_n).

3. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

a. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$.
Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}.$$

b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 3$ on a :

$$(2n-1)u_n \leqslant \sqrt{2}. \qquad (2)$$

c. À l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.