Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \text{ et } g(x) = (\ln x)^2.$$

On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal. Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont données en annexe.

1. **a.** Étudier le signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. En déduire la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, M est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N est le point de $\mathscr{C}'$ de même abscisse.

   a. Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   Étudier les variations de la fonction h sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. En déduire que sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.

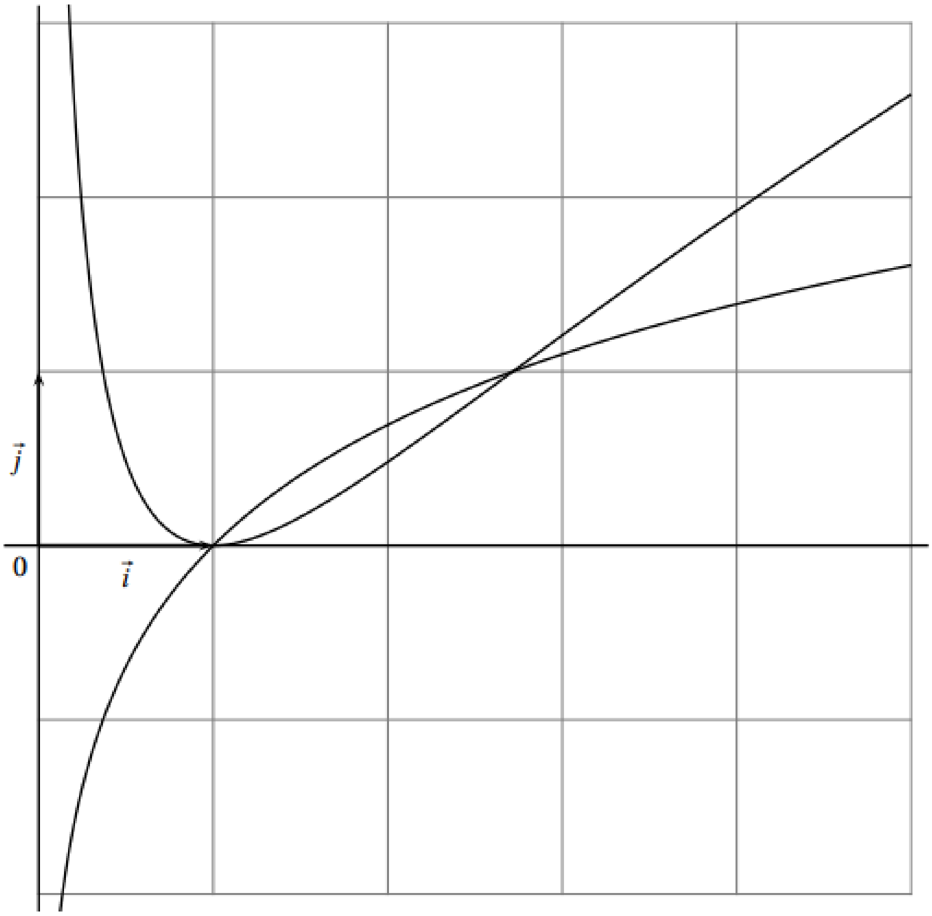
   c. Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.

   d. En déduire que, sur $]0\ ;\ 1[\ \cup\ ]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$, il existe deux réels a et b $(a < b)$ pour lesquels la distance MN est égale à 1.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$.

   b. Vérifier que la fonction G définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ est une primitive de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   c. On considère la partie du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ en unités d'aire de cette partie du plan.


$\vec{j}$
0
$\vec{i}$