Amérique du sud novembre 2013

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = e \times \dfrac{x}{e^x}$.
2) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4) Déterminer la dérivée de la fonction f.
5) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1) Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.

   On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
2) Comparer les fonctions h_n et g'_n, g'_n étant la dérivée de la fonction g_n.

   En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
3) Soit $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.

   En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$. Vérifier cette limite par un algorithme.