On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) & = & \dfrac{xe^x}{e^x-1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) & = & 1. \end{cases}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Établir que, pour tout nombre réel x non nul, on a $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{e^x-1}\right)$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Donner, sans démontrer, la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x-1}$ et démontrer que f est continue en 0.

3. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $e^x \geqslant x+1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x-1)^2}$.

c. Donner le tableau des variations de f.

4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x\,;\,f(x))$ et $M'(-x\,;\,f(-x))$ de la courbe $\mathscr{C}$.

a. Établir que $f(-x) = \dfrac{x}{e^x-1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

b. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?