On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(x + (1 - x)\mathrm{e}^{2x}\right].$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique 2 cm).

1. **a.** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

   Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1 - 2x)\mathrm{e}^{2x}$.

   a. Étudier le sens de variation de u.

   Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0;\, 1]$.

   Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.

   b. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.