Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (3x-1)\,e^{-x} + 2$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

3. On note f' la fonction dérivée de f.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (4-3x)\,e^{-x}$.

b. Étudier le signe de la dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
On notera α cette solution.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. En déduire le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (-3x-2)\,e^{-x} + 2x$.
On admet que la fonction F est une primitive de f.
Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe de abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

5. On admet que la droite d'équation $y = 4x + 1$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Vérifier que, pour tout réel x, $(3x-1)\,e^{-x} + 2 \leqslant 4x + 1$.