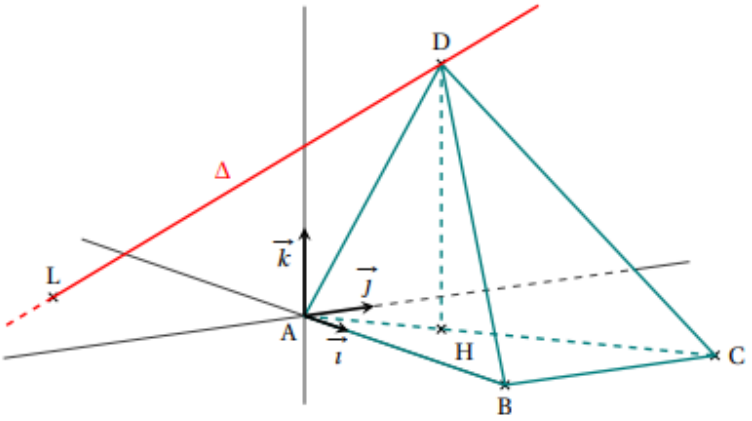
Dans une salle d'escalade, un nouveau module en forme de tétraèdre, destiné à être posé au sol, est en cours de fabrication.
Ce module servira à créer des plans inclinés.
On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
L'unité est le mètre.
On considère les trois points suivants : $B\left(\frac{9}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{9}{4};3;0\right)$ et $D\left(\frac{3}{2};1;3\right)$.
On modélise le module par le tétraèdre ABCD.
On souhaite analyser ce module pour des raisons de construction et de sécurité.

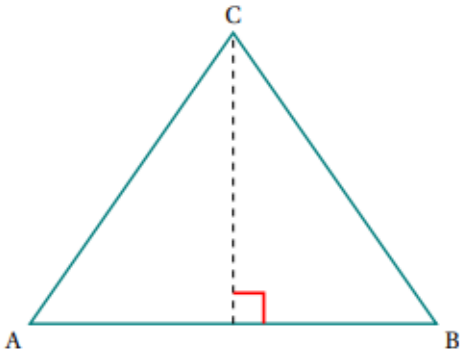


Partie A

1. On représente ci-contre le triangle ABC et sa hauteur issue de C.

a. Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.

b. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $6{,}75\,\text{m}^2$.



2. **a.** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $z = 0$.

b. Montrer que le point $H\left(\frac{3}{2};1;0\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

3. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à la base $\mathcal{B}$.
En déduire le volume du module.

Partie B

1. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :

$$4x+3y+3z-18=0.$$

c. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (BCD) et passant par D.

2. On admet que la droite Δ et le plan (ABC) sont sécants et on désigne par L leur point d'intersection.
Montrer que L a pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2};-2;0\right)$.

3. Le module est considéré adapté aux débutants si l'angle $\widehat{\text{LDH}}$ est strictement inférieur à 60 °.
Montrer que ce module est adapté aux débutants.