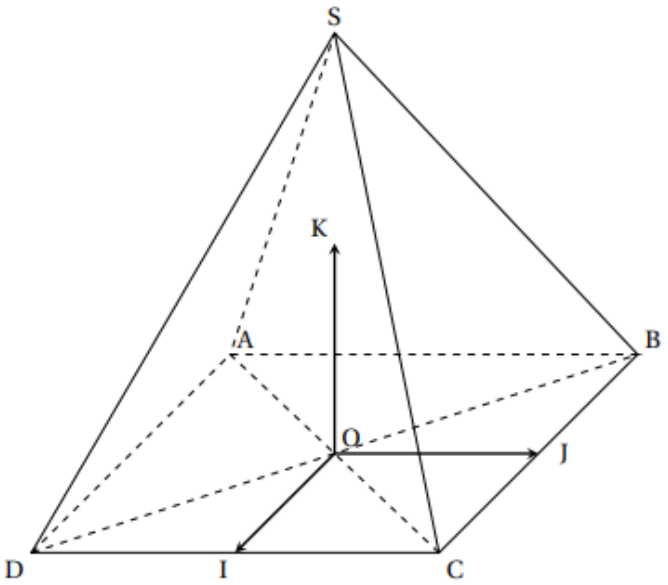
Dans cet exercice l'unité est le cm.
On considère une pyramide à base carrée SABCD comme dans la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

- AB = BC = CD = DA = OS = 2 cm ;
- I est le milieu de [CD], J le milieu de [BC] et K le milieu de [OS].

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$.
On admet que B(−1 ; 1 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), et S(0 ; 0 ; 2).

Les **parties A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

1. Donner les coordonnées des points A et D.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}$.
3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ arrondie au dixième de degré près.

Partie B

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point O au plan (SBC).

1. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y + z - 2 = 0$.
2. On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC).
   a. a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

   b. Calculer les coordonnées du point H.
   c. En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Partie C

On se propose ici de retrouver le résultat de la **partie B** par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{ aire de la base} \times \text{hauteur}$$

   a. Calculer le volume de la pyramide SABCD.
   b. En déduire que le volume de la pyramide OCBS est égal à $\frac{2}{3}$ cm^3.
2. Déterminer l'aire du triangle SBC.
3. Déduire des questions précédentes que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.