

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points suivants :

$$A(1; 3; 0), \quad B(-1; 4; 5), \quad C(0; 1; 0) \quad \text{et} \quad D(-2; 2; 1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
 - b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :
$$2x - y + z + 1 = 0.$$
- c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
4. On appelle H le point de coordonnées $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3})$.
Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.
 - a. Montrer que $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.
 - b. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -3k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles?