TS **ESPACE** feuille 367

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \imath\,,\ \jmath\,,\ k\right)$. On considère :

- les points $A(-1\,;\,2\,;\,1)$, $B(1\,;\,-1\,;\,2)$ et $C(1;\,1;\,1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{2}+2t \\ y & = & 2+t \\ z & = & 3-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \left\{\begin{array}{lcr} x & = & s \\ y & = & \frac{3}{2}+s \\ z & = & 3-2s \end{array}\right. \quad \text{avec } s \in \mathbb{R};$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,4\right)$.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+2y+4z-7=0.$$

3. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
4. **a.** Démontrer que le point $H(-1\,;\,0\,;\,2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC)

   b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment [CS]. On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0;\,1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k.
2. Existe-t-il un point M sur le segment [CS] tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M?