La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à 4 000 individus au 1er janvier 2025.

Partie A : étude d'un modèle discret

Dans cette partie, on modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n).
Pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1er janvier de l'année $2025+n$.
La suite (u_n) est définie par :

- $u_0 = 4$.
- pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n}$.

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier n, $u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026 donné par ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = 4 - \dfrac{4}{x}$.

a. Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

d. Justifier que $\ell = 2$.

e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante?

Partie B : étude d'un modèle continu

On note t le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1er janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction p telle que :

- la fonction p est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$;
- $p(0) = 4$;

- la fonction p est solution de l'équation différentielle (E) $y' + y = 2$ où y est une fonction de la variable réelle t.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

2. En déduire que l'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est $p(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2$.

3. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante?