Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad 2y' + 3y = 8\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$$

où y est une fonction de la variable y et elle est définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

1. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E') : \quad 2y' + 3y = 0.$$

2. Soit f la fonction dérivable sur $[0 ; +\infty[$, définie par

$$f(t) = 4t\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}.$$

On admet que cette fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).
On considère une fonction g définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Démontrer que : « g est solution de (E) »est équivalent à « $g - f$ solution de (E') ».

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer toutes les solutions de (E) qui s'annulent en 0.

Partie B

Un essai clinique est réalisé auprès de plusieurs patients volontaires afin de valider ou non l'efficacité d'un médicament.
On demande au patient d'avaler le médicament sous la forme d'un comprimé de 1 mg puis on étudie la quantité de ce médicament présente dans le sang au cours du temps.
La quantité de ce médicament en fonction du temps écoulé après la prise du comprimé, en mg, est modélisée par la fonction f dérivable sur $[0 ; +\infty[$, définie par :

$$f(t) = 4t\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t},\ t \text{ étant exprimé en heures.}$$

1. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. **a.** Vérifier en détaillant les calculs que pour tout réel t positif, $f'(t) = (4 - 6t)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$.
b. Étudier le signe de la dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
c. Au bout de combien de temps la quantité de ce médicament présente dans le sang est-elle maximale?
3. Démontrer que l'équation $f(t) = 0{,}5$ admet une unique solution sur $[1 ; 3]$.
Donner un encadrement de cette solution, notée α, à 10^{-2} près.
4. L'essai clinique sera validé si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
   - Condition 1 : 50 % de la quantité du médicament est éliminée de l'organisme au plus tard 2 heures après la prise du comprimé.
   - Condition 2 : la quantité moyenne du médicament présente dans le corps du patient entre 1 heure et 3 heures après la prise du comprimé est inférieure à 0,40 mg.

   La condition 1 est-elle réalisée?
   La condition 2 est-elle réalisée?