On étudie le fonctionnement d'un système de chauffage installé dans une pièce.
Ce système se déclenche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18 °C (degrés Celsius), et s'éteint lorsqu'elle atteint 20 °C.

Partie A : Phase de chauffage

Pour une température de la pièce variant de 18 °C à 20 °C, le système de chauffage fonctionne en continu.
La température de la pièce augmente progressivement.
Dans cette partie, on modélise la température de la pièce, en degré Celsius, à l'instant t, exprimé en dizaines de minutes, par une fonction T définie sur $[0;+\infty[$.
On admet que la fonction T est :

- dérivable sur $[0;+\infty[$;
- solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = -0{,}035y + 0{,}91$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

On note T' la fonction dérivée de la fonction T.
On suppose qu'au début de l'étude, la température de la pièce est de 18 °C.
Ainsi $T(0) = 18$.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0;+\infty[$.
2. En déduire que, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, on a :

$$T(t) = 26 - 8\,\mathrm{e}^{-0{,}035t}.$$

3. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra la température de 20 °C.
   On exprimera le résultat en heures et minutes arrondi à la minute.
4. Si une panne du système de chauffage l'empêche de s'éteindre lorsque la température de la pièce atteint 20 °C, la température de la pièce pourra-t-elle dépasser 28 °C selon ce modèle ?
   Justifier.

Partie B : Phase de refroidissement

Lorsque la pièce atteint la température de 20 °C, le système de chauffage s'éteint et la pièce refroidit.
On modélise la température de la pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n},$$

où n est un nombre entier exprimant le temps écoulé en dizaines de minutes.

1. Montrer que $u_1 = 19{,}72$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n > 10.$$

On admet que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

   a. Justifier que cette limite est solution de l'équation

$$x = 0{,}965x + 0{,}35.$$

b. Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.