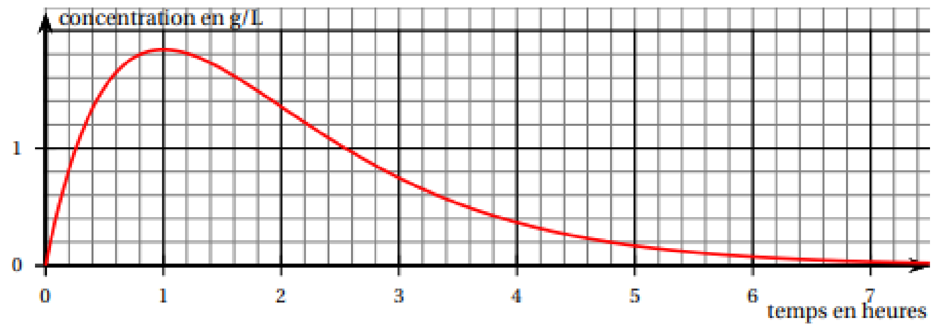
On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament.
On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f. Avec la précision permise par le graphique, donner sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geqslant 1$.
3. La convexité de la fonction f sur l' intervalle $[0; 8]$.

Partie B : détermination de la fonction f

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad y' + y = 5\mathrm{e}^{-t},$$

d'inconnue y, où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $u(t) = at\mathrm{e}^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.
   Déterminer l'expression de la fonction f.

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variation complet.
3. Démontrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.
   On donnera une valeur approchée à 10^{-2} des réels t_1 et t_2.
4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence.
   Quelle est la durée en heures et minutes du risque de somnolence lors de la prise de ce médicament ?