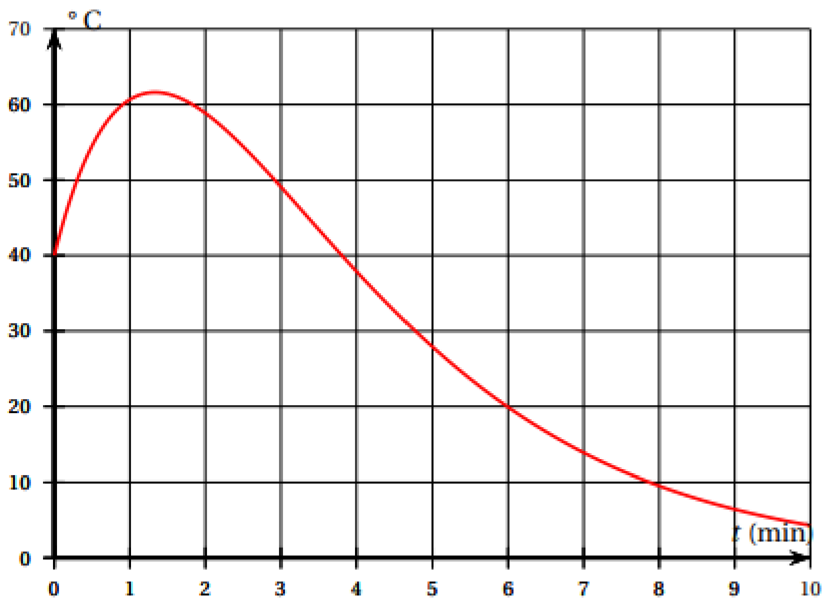
Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.
L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.
La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0 ; 10]$.
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un repère orthogonal du plan, on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction température en fonction du temps sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

1. Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t = 0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.
On précise que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at + b)\mathrm{e}^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

2. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b.

3. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,5y = 60\mathrm{e}^{-0,5t}$. Déterminer la valeur de a.

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)\mathrm{e}^{-0,8t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;10]$, on a : $f'(t) = (40 - 30t)\mathrm{e}^{-0,5t}$.
2. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.
   b. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0 ; 10]$.
   c. Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2, exprimés en minute, par

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 320 - \frac{800}{\mathrm{e}^2}$$

b. En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.