TIKTOKOK 128

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle suivante où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(E) : \quad y' + y = 2\cos(x)$$

Affirmation 1 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$ est solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g.
Affirmation 2 : Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point d'intersection.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{2n + \sin(n)}{n+1}$$

Affirmation 3 : La suite (v_n) diverge.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on a $u_n = n^2$.

5. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \mathrm{e}^{-n}$.
On pose, pour tout entier naturel n, $\quad S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Affirmation 5 : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}$