TIKTOK 277

On considère n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{1-x}.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et on note f_n' sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.
On étudie donc la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Montrer que $f_1'(x)$ est strictement positive pour tout réel x de $[0\,;\,1[$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0\,;\,1]$
3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,1]$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On admet que $u_1 = \mathrm{e} - 2$.

1. **a.** Justifier que pour tout $x \in [0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$$

.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()` :

```
from math import exp

def suite():
  u = ...
  for n in range (1, ...):
      u = ...
  return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^8 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).