TIKTOK 275

El Niño est un phénomène océanique à grande échelle du Pacifique équatorial qui affecte le régime des vents, la température de la mer et les précipitations sur l'ensemble du globe. Certaines années, ce phénomène est dit « dominant ». Les scientifiques cherchent à modéliser l'apparition de ce phénomène.

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes

Partie A - Premier modèle

À partir d'un échantillon de données, on considère une première modélisation :

- chaque année, la probabilité que le phénomène El Niño soit dominant est égale à $0,4$;
- la survenue du phénomène El Niño se fait de façon indépendante d'une année sur l'autre.

On note X la variable aléatoire qui, sur une période de 10 ans, associe le nombre d'années où El Niño est dominant.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. **a.** Calculer la probabilité que, sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant exactement 2 années.
   b. Calculer $P(X \leqslant 2)$. Que signifie ce résultat dans le contexte de l'exercice ?
3. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Partie B - Second modèle

Après une étude d'un recueil de données plus important sur les 50 dernières années, une autre modélisation apparait plus pertinente :

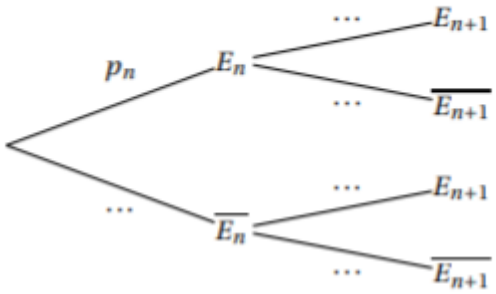
- si le phénomène El Niño est dominant une année, alors la probabilité qu'il le soit encore l'année suivante est $0,5$
- par contre, si le phénomène El Niño n'est pas dominant une année, alors la probabilité qu'il soit dominant l'année suivante est $0,3$.

On considère que l'année de référence est 2023.
On note pour tout entier naturel n :

- E_n l'évènement « le phénomène El Niño est dominant l'année $2023 + n$ » ;
- p_n la probabilité de l'évènement E_n.

En 2023, El Niño n'était pas dominant. On a ainsi $p_0 = 0$.

1. Soit n un entier naturel. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Justifier que $p_1 = 0,3$.

3. En vous aidant de l'arbre, montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,3$$

On cherche à prévoir l'évolution de l'apparition du phénomène El Niño.

4. **a.** Conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite (p_n).

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $p_n \leqslant \dfrac{3}{8}$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (p_n).

d. En déduire la convergence de la suite (p_n).

On cherche à déterminer la limite de la suite (p_n).

5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \dfrac{3}{8}$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,2 et préciser son premier terme.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_n = \frac{3}{8}\left(1 - 0,2^n\right).$$

c. Calculer la limite de la suite (p_n).

d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.