TIKTOK 274

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.

   Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

   Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. *a.* Établir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}$.

   En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

   b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2...A_{n-1}A_n$.

   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n$.

   Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?