TIKTOK 267

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.
La notice du médicament indique que :

- le traitement doit durer au moins 7 h;
- lorsque sa quantité, en mg, présente dans le sang est supérieure ou égale à 3 mg, il y a un risque de toxicité.

On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans le sang au cours du temps sachant que le patient reçoit une première dose de 1 mg.
Deux protocoles sont étudiés dans les deux parties qui sont indépendantes.

Partie A : étude du premier protocole

Après l'injection de la première dose, une quantité supplémentaire de médicament est administrée régulièrement et de façon continue à un patient mis sous perfusion.
Dans cette partie, on modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient par une fonction q définie sur $[0\,;\,+\infty[$, où $q(t)$ désigne la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient, et t représente le temps, en heure, écoulé depuis l'injection initiale. On a ainsi $q(0) = 1$.
On admet que :

- la fonction q est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note q' sa fonction dérivée;
- la fonction q est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) :

$$y' = -\frac{3}{10}y + 1$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Donner les solutions sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle (E).
2. Montrer que pour tout réel t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, $q(t) = \dfrac{10}{3} - \dfrac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t}$.
3. Déterminer la limite de la fonction q en $+\infty$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. Étudier les variations de la fonction q sur $[0\,;+\infty[$.
5. Déterminer, en résolvant une inéquation, au bout de combien de temps après l'injection initiale le médicament présente un risque pour le patient. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-1}.
6. D'après ce modèle, le protocole présente-t-il un risque pour le patient? Justifier.

Partie B : étude du second protocole

On injecte au patient une première dose de médicament de 1 mg. On admet que la quantité de médicament présente dans le sang du patient baisse de 30 % toutes les heures. Pour compenser cette baisse, on injecte une dose supplémentaire de 0,75 mg de médicament toutes les heures.
On modélise la situation par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient au bout de n heures écoulées depuis l'injection initiale.
Sous ces conditions, on a $u_0 = 1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 0,75$.

2. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

   d. D'après ce modèle, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2,5$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,7^n$.

4. D'après ce modèle, au bout de combien d'injections supplémentaires la quantité de médicament présente dans le sang de ce patient dépasse-t-elle 2,4 mg ?