TIKTOK 263

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$$

1) a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

   b) Étudier les variations de la suite (x_n).

   c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite, (x_n) ?

2) a) Démontrer que, pour tour entier naturel n non nul :

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   b) En déduire la limite de la suite (x_n).

3) a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$$

   b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

4) On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n$