TIKTOK 261

Partie 1

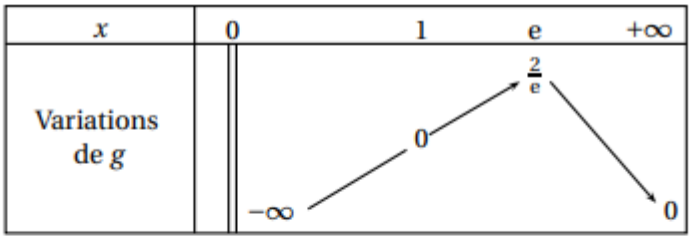
Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2-2\ln x}{x^2}.$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:



Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

a. la valeur $\frac{2}{e}$;

b. les variations de la fonction g sur son ensemble de définition ;

c. les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = [\ln(x)]^2.$$

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.
2. À l'aide de la partie 1, étudier :
   a. la convexité de la fonction f ;
   b. les variations de la fonction f.
3. a. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.
   b. En déduire que, pour tout réel x dans $]0\,;\,\mathrm{e}]$:

$$[\ln(x)]^2 \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}}x - 1.$$