TIKTOK 258

Commun à tous les candidats

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que x est solution de l' équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2. Étude du signe de la fonction f
   a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.
   d. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considéra la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.