TIKTOK 255

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\ \imath\,,\ \jmath\,,\ k\,)$. On considère :

- les points A$(-1\,;\,2\,;\,1)$, B$(1\,;\,-1\,;\,2)$ et C$(1\,;\,1\,;\,1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d:\begin{cases} x &= \frac{3}{2}+2t \\ y &= 2+t \\ z &= 3-t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d:\begin{cases} x &= s \\ y &= \frac{3}{2}+s \\ z &= 3-2s \end{cases} \quad \text{avec } s\in\mathbb{R};$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point S$\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,4\right)$.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+2y+4z-7=0.$$

3. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
4. **a.** Démontrer que le point H$(-1\,;\,0\,;\,2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC)

   b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM<\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment [CS]. On a donc $\overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k.
2. Existe-t-il un point M sur le segment [CS] tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M?