TIKTOK 252

On appelle f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{\sqrt{x}}$ si $x\neq 0$, et $f(0)=0$.

1) Prouver que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{-t}-1}{t}=-1$
2) En déduire la continuité de f en 0.
3) Etudier le signe de $f(x)$.
4) Etudier la limite de f en $+\infty$.
5) Montrer que l'on a pour tout $x>0$: $f'(x)=\dfrac{1-e^{-x}-2xe^{-x}}{2x\sqrt{x}}$.
6) Etudier les variations de f à l'aide d'une fonction auxiliaire.
7) Etudier la dérivabilité de f en 0 (on sera amené à utiliser la question 1)