TIKTOK 251

1) On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par f(0) = 1 et pour x > 0

f(x) = $\frac{\ln(1+x)}{x}$. justifier que f est continue en 0

2) a) étudier le sens de variation de la fonction g définie sur [0 ; +∞ [par :

g(x) = $\ln(1+x) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})$. calculer g(0) et en déduire que sur [0 ; +∞ [

$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

b) par une étude analogue , montrer que si $x \geq 0$ alors $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

c) établir que pour tout x > 0 on a : $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

en déduire que f est dérivable en zéro et que f '(0) = $-\frac{1}{2}$

3)a) Soit h la fonction définie sur [0 ; +∞ [par h(x) = $\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$

étudier le sens de variation de h et en déduire le signe de h sur [0 ; +∞ [

b) Montrer que sur]0; +∞ [f '(x) = $\frac{h(x)}{x^2}$

c) Dresser le tableau de variations de f en précisant la limite de f en +∞