TIKTOK 250

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

**Partie A : Conjecture**

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de $u_1$ et $u_2$.
2. Donner une valeur approchée à $10^{-5}$ près des termes $u_3$ et $u_4$.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)$.

**Partie B : Validation des conjectures**

On considère la suite numérique $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par :
$v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que ; pour tout entier naturel $n$, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   **b.** En déduire le sens de variation de la suite $(v_n)$.
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite $(v_n)$ converge ?
5. On note $\ell$ limite de la suite $(v_n)$.

   On admet que $\ell$ appartient à j'intervalle $[-1 ; 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.

   Déterminer la valeur de $\ell$.
6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?