TIKTOK 243

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 e^{1-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer ?

b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx.$$

a. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.

b. Calculer I_1, puis I_2.

c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.

3. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e.$$

b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.