TIKTOK 242

Soit la suite numérique $(u_n)$ définie sur **N** par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

**1.** **a.** Calculer $u_1, u_2, u_3$ et $u_4$. On pourra en donner des valeurs approchées à $10^{-2}$ près.

**b.** Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

**2.** **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$u_n \leqslant n + 3.$$

**b.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

**c.** En déduire une validation de la conjecture précédente.

**3.** On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur **N** par $v_n = u_n - n$.

**a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

**b.** En déduire que pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

**c.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**4.** Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

**a.** Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.

**b.** Déterminer la limite de la suite $(T_n)$.