

Les parties A et B sont indépendantes

Un site internet propose des jeux en ligne.

Partie A :

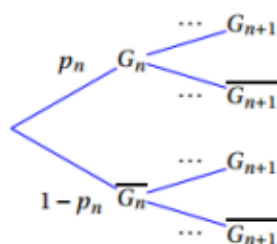
Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n -ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n .

L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.
3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.
 - a. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
 - b. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
 - c. Déterminer la limite de p_n .

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.

On suppose que toutes les parties sont indépendantes.

La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1.
 - a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
 - b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
 - c. Déterminer l'espérance de X .
2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
 - a. Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
 - b. Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €? Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.