

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
 Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
 Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) , définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n , v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$
 - a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
 - b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
3.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
 - b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
 On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
 - c. Déterminer la valeur de ℓ .
 Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé? Justifier la réponse.