

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(2; 0; 3), B(0; 2; 1), C(-1; -1; 2) \text{ et } D(3; -3; -1).$$

1. Calcul d'un angle

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- Calculer les longueurs AB et AC.
- À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

2. Calcul d'une aire

- Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
- En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$.
- Calculer l'aire du triangle ABC.

3. Calcul d'un volume

- Soit le point F(1; -1; 3). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
- Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
- Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.